第３講　微分法，積分法①

1　［1］　実数を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとする．このとき，$a>0$，$b>0$ ならば，少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ．

［2］　p，q は定数で $p \geqq 2$，$q \geqq 2$ とする．2 つの 3 次方程式 $x^3+x-p=0$，$x^3+x-q=0$ の実数解をそれぞれ α，β とするとき，$|\alpha-\beta| \leqq \dfrac{1}{4}|p-q|$ が成り立つことを示せ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2　3次式 $f(x)=x^3+5x^2+3x+c$（c は定数）について次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)=0$ が3個の相異なる実数解をもつためには，c の値はどんな範囲になければならないか．

(2)　$f(x)=0$ が3個の相異なる整数解をもつことがあるか．また2個の相異なる整数を解としてもつのはどんな場合か．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3 関数 $f(x)=x-2+3|x-1|$ を考える．$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，関数

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)\,dt\right|$$

の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第３講　微分法，積分法①

1　［1］　実数を係数とする３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が異なる３つの実数解をもつとする．このとき，$a>0$，$b>0$ ならば，少なくとも２つの実数解は負であることを示せ．

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=3x^2+2ax+b$　　軸：$x=-\dfrac{a}{3}$　$f'(0)=b$

$a>0$，$b>0$ のとき　(軸)<0，$f'(0)>0$

よって，$x\geqq 0$ において　$f'(x)>0$　つまり　$f(x)$は単調増加

ゆえに，$x\geqq 0$ における $f(x)=0$ の解は多くて１つである．

よって，$f(x)=0$ が異なる３実数解をもつならば，$x<0$ に少なくとも２つの解をもつ．

1　［2］　p，q は定数で $p\geqq 2$，$q\geqq 2$ とする．２つの３次方程式 $x^3+x-p=0$，$x^3+x-q=0$ の実数解をそれぞれ α，β とするとき，$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$ が成り立つことを示せ．

$x^3+x-p=0$　より　$x^3+x=p$　$(p\geqq 2)$

$f(x)=x^3+x$ とおくと，$f'(x)=3x^2+1>0$ より $f(x)$ は単調増加である．

よって，$f(x)=2$ となる x はただ１つあり，$f(1)=2$ より，それは $x=1$

ゆえに $f(x)=p$　$(p\geqq 2)$　の実数解 α について $\alpha\geqq 1$ である．同様に $\beta\geqq 1$ である．

また，$\alpha^3+\alpha-p=0$，$\beta^3+\beta-q=0$より

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha-\beta)=p-q \qquad (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1)=p-q$$

ここで　$t=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1\geqq 1^2+1\cdot 1+1^2+1=4$　より　$|\alpha-\beta|=\dfrac{1}{t}|p-q|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$

ゆえに　$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$　である．

2　３次式 $f(x)=x^3+5x^2+3x+c$（c は定数）について次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)=0$ が３個の相異なる実数解をもつためには，c の値はどんな範囲になければならないか．

(2)　$f(x)=0$ が３個の相異なる整数解をもつことがあるか．また２個の相異なる整数を解としてもつのはどんな場合か．

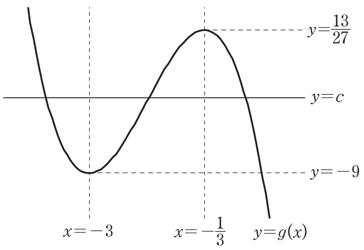
(1)　$f(x)=0$ より $-x^3-5x^2-3x=c$

$g(x)=-x^3-5x^2-3x$ とすると，

$g'(x)=-3x^2-10x-3=-(3x+1)(x+3)$

よって，$g(x)$ は極大値　$g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{13}{27}$

極小値　$g(-3)=-9$ をもつ．



$y=g(x)$ と $y=c$ のグラフの交点が 3 個になるときを考えて，

求める c の範囲は　$\boldsymbol{-9<c<\frac{13}{27}}$

(2)　$f(x)=0$ が異なる 3 実数解をもつとき，その 3 解を α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とする．

(1)のグラフより，$\alpha<-3$，$-3<\beta<-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}<\gamma$

よって，β が整数のとき $\beta=-2$，-1 に限られる．

$\beta=-2$ のとき　$f(-2)=0$ より　$c=-6$

このとき　$f(x)=x^3+5x^2+3x-6=(x+2)(x^2+3x-3)$ より，α，γ は整数ではない．

$\beta=-1$ のとき　$f(-1)=0$ より　$c=-1$

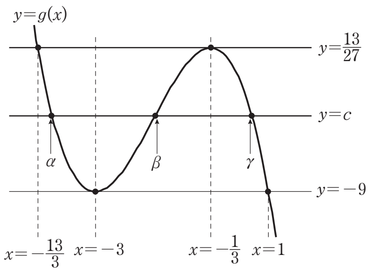
このとき $f(x)=(x+1)(x^2+4x-1)$　より α，γ は整数ではない．

以上より，$f(x)=0$ が 3 個の相異なる整数解をもつことはない．

$f(x)=0$ が 3 実数解をもつとき，その 3 解を α, β γ $(\alpha\leqq\beta\leqq\gamma)$ とする．

$g(x)=-9$ より　$x=-3$, 1

$g(x)=\frac{13}{27}$ より　$x=-\frac{1}{3}$，$-\frac{13}{3}$



グラフより，$-\frac{13}{3}\leqq\alpha\leqq-3$，$-3\leqq\beta\leqq-\frac{1}{3}$，

$-\frac{1}{3}\leqq\gamma\leqq1$　である．

先の結果より，$\beta=-2$，-1 のときは α，γ は整数ではない．

γが整数のとき $\gamma=0$, 1 に限られる．

$\gamma=0$ のとき　$c=0$　　このとき，$f(x)=x(x^2+5x+3)$ より α は整数ではない．

$\gamma=1$ のとき　グラフより，$\alpha=\beta=-3$ となり適する．このとき　$c=-9$

以上より，$f(x)=0$ が 2 個の相異なる整数を解としてもつのは　$\boldsymbol{c=-9}$　のときである．

3　関数$f(x)=x-2+3|x-1|$を考える．$0\leqq x\leqq2$の範囲で，関数

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)dt\right|$$

の最大値を求めよ．

$$f(x)=x-2+3|x-1|=\begin{cases}-2x+1 & (x\leqq1)\\ 4x-5 & (x\geqq1)\end{cases}$$

(i)　$0\leqq x\leqq1$ のとき

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x(-2t+1)dt=-x^2+x=-x(x-1)$$

$$\int_x^2 f(t)\,dt=\int_x^1(-2t+1)\,dt+\int_1^2(4t-5)\,dt=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

ゆえに　$g(x)=(-x^2+x)+(x^2-x+1)=1$

(ii)　$1\leqq x\leqq 2$ のとき

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1(-2t+1)\,dt+\int_1^x(4t-5)\,dt=2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$$

$$\int_x^2 f(t)\,dt=\int_x^2(4t-5)\,dt=-2x^2+5x-2=-(2x-1)(x-2)$$

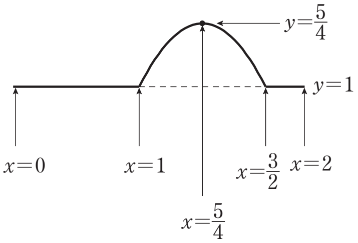
ゆえに　$1\leqq x\leqq \frac{3}{2}$ のとき

$$g(x)=-(2x^2-5x+3)+(-2x^2+5x-2)=-4x^2+10x-5=-4\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$$

$\frac{3}{2}\leqq x\leqq 2$ のとき

$$g(x)=(2x^2-5x+3)+(-2x^2+5x-2)=1$$

(i)(ii)より，$g(x)$ のグラフの概形は下のようになる．



よって求める最大値は　$\frac{5}{4}$　$\left(x=\frac{5}{4}\text{ のとき}\right)$

第３講　微分法，積分法①　練習問題

1　3 次関数 $f(x)=x^3-3x^2-4x+k$ について，次の問いに答えよ．ただし，k は定数とする．

(1)　$f(x)$ が極値をとるときの x を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき，k の値およびその整数解を求めよ．

2　$f(x)=-(x+1)|x-4|+6$ とし，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ とする．

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかきなさい．

(2)　$F(x)$ を計算しなさい．

(3)　$0 \leqq x \leqq 6$ における関数 $F(x)$ の最大値を求めなさい．

第３講　微分法，積分法①　　練習問題　解答

1　3 次関数 $f(x)=x^3-3x^2-4x+k$ について，次の問いに答えよ．ただし，k は定数とする．

(1)　$f(x)$ が極値をとるときの x を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき，k の値およびその整数解を求めよ．

解答例

(1)　$f'(x)=3x^2-6x-4$　　$f'(x)=0$ となる x は　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

$y=f'(x)$ のグラフより，この x の前後で $f'(x)$ の正負が変わり，確かに $f(x)$ は極値をもつ．

ゆえに　$\boldsymbol{x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}}$

(2)　$f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとき，

(1)より $\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}<\beta<\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$　←**解の取り得る値の範囲をグラフより出す**

よって，β が整数のとき，それは 0，1，2 に限られる．

$\beta=0$ のとき

$f(0)=0$ より $k=0$

このとき　$f(x)=x(x+1)(x-4)$より　$\alpha=-1$，$\gamma=4$

よって，α, γ は整数解である．

$\beta=1$ のとき

$f(1)=0$より　$k=6$

このとき　$f(x)=(x-1)(x^2-2x-6)$　より　$\alpha=1-\sqrt{7}$，$\gamma=1+\sqrt{7}$

よって，α, γ は整数とならず不適．

> 「組立除法」による因数分解は確実であろうか？ 解がわかっているときはもちろん「解が不明で試行錯誤する」ときにはかなりの有効打となろう．

$\beta=2$ のとき

$f(2)=0$　より　$k=12$

このとき　$f(x)=(x-2)(x+2)(x-3)$ より　$\alpha=-2$，$\gamma=3$

よって α, γ は整数解である．

以上より，求める，k の値およびその整数解は

$k=0$ のとき $x=-1,\ 0,\ 4$　　$k=12$ のとき $x=-2,\ 2,\ 3$

2 $f(x)=-(x+1)|x-4|+6$ とし，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ とする．

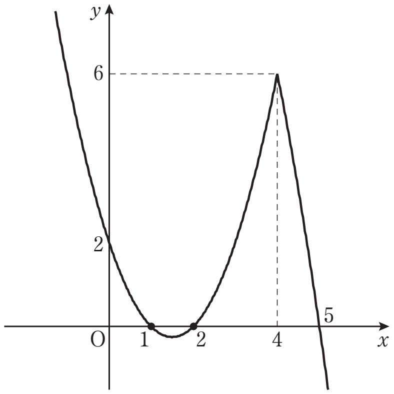
(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかきなさい．

(2) $F(x)$ を計算しなさい．

(3) $0 \leqq x \leqq 6$ における関数 $F(x)$ の最大値を求めなさい．

(1) $f(x)=\begin{cases} -(x+2)(x-5) & (x \geqq 4) \\ (x-1)(x-2)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} & (x \leqq 4) \end{cases}$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図．



(2) $x \leqq 4$ のとき

$$F(x)=\int_0^x (t^2-3t+2)dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^x=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x$$

$x \geqq 4$ のとき

$$F(x)=\int_0^4 (t^2-3t+2)dt+\int_4^x (-t^2+3t+10)dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^4+\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+10t\right]_4^x$$
$$=\frac{64}{3}-24+8-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+10x-\left(-\frac{64}{3}+24+40\right)$$
$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+10x-\frac{112}{3}$$

以上より　$F(x)=\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x} & \boldsymbol{(x \leqq 4)} \\ \boldsymbol{-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+10x-\dfrac{112}{3}} & \boldsymbol{(x \geqq 4)} \end{cases}$

「積分」＝「符号つき面積」と考えれば自明．

(3) $y=f(x)$ のグラフより，$F(x)$ は $x=5$のとき最大となる．

よって，求める最大値は　$F(5)=-\dfrac{125}{3}+\dfrac{75}{2}+50-\dfrac{112}{3}=\boldsymbol{\dfrac{17}{2}}$